Ablaufdauer

Der Nutzwerttrend der bisherigen Produktgenerationen[1] ist ein bedeutsamer Maßstab für den Nutzwert und den Lebenszyklus neuer Produktgeneration; er bestimmt die wirtschaftliche Angebotsdauer neuer Produkte, aber auch die Zeit für Produktentwicklung und -überleitung[2].

Nutzwerttrend

AAT

Der Nutzwerttrend von Produktgenerationen mit Sättigungsverlauf kann mit Zeitreihen der bisherigen Marktentwicklung durch Regressionsanalyse bestimmt werden. Dafür geeignete Ausgleichsfunktion werden nach inhaltlichen, grafischen und visuellen Merkmalen entwickelt oder ausgewählt (vgl. Bild 1)[3], wie z. B. die hier benutzte Sinuspotenzfunktion[4].

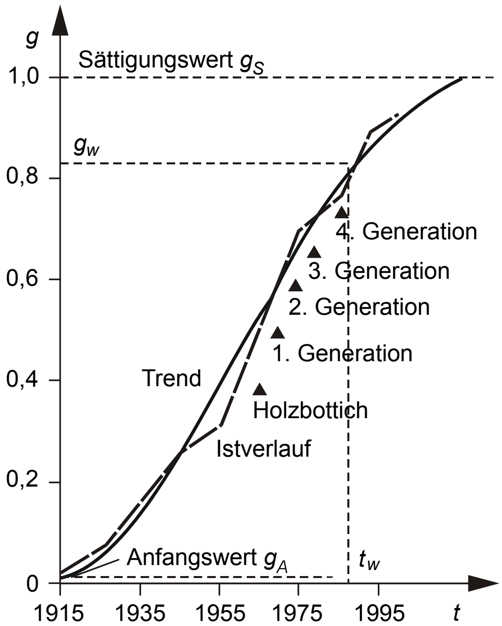

Bild 1: Internationale Entwicklung des Nutzwertes von Haushaltswaschgeräten

Die Trendfunktion $g(t)$ über der Generationendauer t_G beruht auf einer Schätzung des Ausgangsniveaus g_A, Sättigungswertes g_S und Verteilungsexponenten κ. Der Einfluss zahlreicher weiterer Faktoren wird durch die Varianz σ^2 bzw. Standardabweichung σ erfasst. Die aus der 1. und 2. Ableitung der Stammfunktion gewonnenen Ausdrücke für die Wendestelle t_m und den Wendewert g_m erlauben das Ziehen von Schlüssen, wie die Vorgabe des Nutzwertes und für den Lebenszyklus der Produktgeneration optimiert werden kann.

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } t < 0 \\ g_A + (g_S - g_A) \cdot \sin^{\kappa}\left(\dfrac{\pi \cdot t}{2 \cdot t_G}\right), & \text{wenn } 0 \le t \le t_G \\ g_S, & \text{wenn } t > t_G \end{cases}$$

$$[g_A, g_S, \kappa] \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(g(t_i) - g_i\right)^2} \to \text{Min!} \quad \sigma = \frac{1}{n-3} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(g(t_i) - g_i\right)^2}$$

$$t_m = \frac{2 \cdot t_G}{\pi} \cdot \arctan \sqrt{\kappa - 1} \quad \Rightarrow \quad g_m = g(t_m)$$

Die PUR-PUR AG entwickelt ein computergesteuertes Verpackungssystems. Für die Festlegung der Zielvorgabe des Nutzwertes soll auf Grund der aus einer Nutzwertanalyse resultierenden Daten (vgl. Tab. 1) eine Trendberechnung (vgl. Tab. 2) erfolgen.

Tab. 1: Zeitreihe der bisherigen Nutzwertentwicklung

***t* [a]**	***g* [%]**	***t* [a]**	***g* [%]**
0	7,20	50	62,70
10	14,62	55	67,80
20	26,73	60	74,70
30	32,70	65	81,09
40	46,70	70	89,17
45	56,20		

Generationendauer	t_G	=	90	a
Nutzwert bei Leistungseinführung	g_A	=	9,82	%
Nutzwert an der Wendestelle	g_m	=	51,06	%
Nutzwert bei Sättigung	g_S	=	95,34	%
Stichprobenumfang	n	=	11	
Wendestelle	t_m	=	41,85	a
Verteilungsexponent	κ	=	1,80217	
Standardabweichung	σ	=	0,86	%

Tab. 2: Nutzwerttrend für die Generationendauer

***t* [a]**	***g* [%]**	***t* [a]**	***g* [%]**	***t* [a]**	***g* [%]**
0	9,82	45	55,62	70	86,27
10	13,47	50	62,72	75	90,16
20	22,19	55	69,52	80	93,02
30	34,34	60	75,81	85	94,76
40	48,39	65	81,45	90	95,34

Lebenszyklus

AAL

Für die Abschätzung der Ablaufdauer t_H und Optimierung des Nutzwerts g_Z einer Produktgeneration werden die mit der Nutzwerttrendfunktion $g(t)$ verwendeten Approximationen der Generationendauer t_G, des Anfangswertes g_A und Sättigungsnutzwertes g_S verwendet (vgl. Bild 2):

$$g_Z = g_A + (g_S - g_A) \cdot \sin^{\kappa}\left(\frac{\pi \cdot t_Z}{2 \cdot t_G}\right) \quad \Rightarrow \quad g_A, \quad g_S, \quad \kappa.$$

Zusammen mit dem Pflichtenheft liegt ein Nutzwertziel g_Z für das Produkt vor. Zusammen mit der bereits verwendeten Generationendauer t_G ist es möglich, die Generationszeit t_Z, bei der die Neuentwicklung auf dem Markt das beherrschende Nutzwertniveau vorfindet, rechnerisch abzuschätzen. Der Lebenszyklus t_H beginnt zum Zeitpunkt t_S der Markteinführung und erreicht seine Halbzeit t_Z bei Übereinstimmung von Trend $g(t_Z)$ und Nutzwert g_Z:

$$t_Z = \frac{2 \cdot t_G}{\pi} \arcsin \sqrt[\kappa]{\frac{g_Z - g_A}{g_S - g_A}} \quad \Rightarrow \quad t_H = 2 \cdot (t_Z - t_S).$$

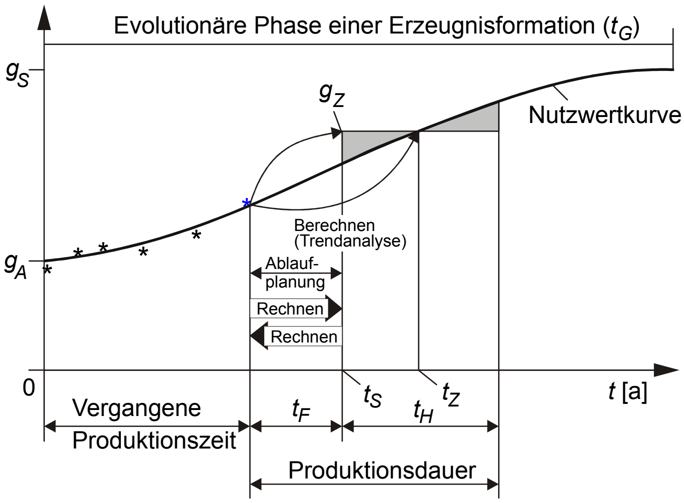

Bild 2: Prinzipskizze der Ablaufdauer

Aus der Zusammenfassung dieser beiden Terme ergibt sich die Berechnungsformel für den voraussichtlichen Lebenszyklus des neuen Erzeugnisses.

$$t_H = 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot t_G}{\pi} \arcsin \sqrt[\kappa]{\frac{g_Z - g_A}{g_S - g_A}} - t_S \right)$$

Nutzwert bei Leistungseinführung	g_A	=	9,82	%
Nutzwert bei Sättigung	g_S	=	95,34	%
Nutzwert des neuen Produkts	g_Z	=	87,60	%
Verteilungsexponent	κ	=	1,80217	
Generationendauer	t_G	=	90	a
Abgelaufene Leistungsdauer	t_S	=	70	a
Optimale Lebenszyklus	t_H	=	4,92	a

Entwicklungsdauer

BET

Die Entwicklungsdauer t_F für eine neue Produktgeneration erfasst die Dauer der Entwicklungsvorgänge als Zufallsgrößen. Die *Schätzungen* der optimistischen, pessimistischen und wahrscheinlichen Dauer der Vorgänge werden mit der Betaverteilung[5] ausgewertet; sie ergibt die Erwartungswerte und Varianzen. Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit der Einhaltung vorgegebener Zeitgrenzen und die Abschätzung des Risikos von Ziel- und Terminentscheidungen soll folgende Fragen beantworten: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein

- gegebener Termin eingehalten wird? Betrachtete Zufallsgröße ist der früheste Termin, Vorgabewert ist der gegebene Termin.
- bestimmtes Ereignis kritisch wird? Betrachtete Zufallsgröße ist die Pufferzeit des Ereignisses mit der Pufferzeit gleich Null, weil diese Ereignisse kritisch sind.

Erwartungswert und Varianz unabhängiger Zufallsgrößen werden addiert bzw. subtrahiert. Das gilt bei beliebig verteilten Größen exakt, die Voraussetzung der Unabhängigkeit ist allerdings bei Entwicklungsdauern nur bedingt gegeben. Ihr Mittel sollte stets größer als die wahrscheinliche Vorgangsdauer sein, da linkssteile Verteilung vorausgesetzt wird. Dann liegt der wahrscheinliche Wert näher an der optimistischen Dauer als an der pessimistischen.

Die Beziehungen beruhen auf dem *zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung*: Die Zeitsumme der Zufallsgrößen, die der gleichen Verteilungsfunktion gehorchen, ist asymptotisch normalverteilt. Für alle Erwartungswerte der Vorgangsdauern ist die gleiche Beta-Verteilungsfunktion gegeben, die Zufallsgrößen gehen nur als relativ kleine Größen in den Grenzwert ein. Es gelten folgende Beziehungen und Regeln:

Allgemeine Bedingung: $i < j, \quad i = 0, 1, \ldots, (z-1), \quad j = z, (z-1), (z-2), \ldots, 1$

Erwartungswerte als gewogene Mittel der Schätzwerte: $\bar{t}_{ij}$

Mittelwert des frühesten Termins des i-ten Ereignisses: $T_{f\,i}$

Mittelwert des spätesten Termins des i-ten Ereignisses: $T_{s\,i}$

Prozessdauer als Summe der kritischen Vorgangszeiten: $\overline{T}_P = \sum_{l=1}^{z} \overline{T}_l$

Termininterpretation mit der Normalverteilung: $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \quad (t - \text{reell})$

Varianz der Prozessdauer: $\sigma^2_{\overline{T}_p} = \sum_{l=1}^{z} \sigma^2_{\overline{T}_l}$

Varianz des frühesten Termins des i-ten Ereignisses: $\sigma^2_{T_{fi}}$

Varianz des spätesten Termins des i-ten Ereignisses: $\sigma^2_{T_{si}}$

Varianzen als Teil der Verteilungsbreite: $\sigma^2_{t_{ij}}$

Startbedingung: $\overline{T}_{f\,0} = 0$ (1)

Frühester Termin des j-ten Ereignisses: $\overline{T}_{fj} = \operatorname*{Max}_{i} [\overline{T}_{fi} + \bar{t}_{i,j}]$ (2)

Startbedingung: $\sigma^2_{\overline{T}_{f0}} = 0$ (3)

Varianz des frühesten Termins des i-ten Ereignisses: $\sigma^2_{\overline{T}_{fj}} = \sigma^2_{\overline{T}_{fi}} + \sigma^2_{\bar{t}_{ij}}$ (4)

Ablaufdauer des Projektes: $\overline{T}_{f_m} = \overline{T}_{s_m}$ (5)

Mittel des spätesten Termins des i-ten Ereignisses: $\overline{T}_{si} = \operatorname*{Min}_{j} [\overline{T}_{sj} - \bar{t}_{i,j}]$ (6)

Varianz der Ablaufdauer des Projektes: $\sigma^2_{\overline{T}_{sz}} = 0$ (7)

Varianz des spätesten Termins des i-ten Ereignisses $\sigma^2_{\overline{T}_{si}} = \sigma^2_{\overline{T}_{sj}} + \sigma^2_{\bar{t}_{ij}}$ (8)

Die Beziehung 4 wird auf alle Vorgänge (*i*,*j*) angewandt, die nach Formel 2, die Beziehung 8 auf alle Vorgänge (*i*,*j*), die nach Formel 6 ausgewählt worden sind.

Wahrscheinlichkeit auf Einhaltung des frühestmöglichen Termins

$$P\left(\left(\overline{T}_{f_i} - \tau\right) \le \overline{T}_{f_i} \le \left(\overline{T}_{f_i} + \tau\right)\right) = 2 \cdot \int_0^{\tau} f(t) \cdot \mathrm{d}t, \quad \tau = t \cdot \sigma_{\overline{T}_f}$$

Wahrscheinlichkeit, dass ein frühestmöglicher nach dem spätestmöglichen Termin eintritt:

$$P\left(\overline{T}_{si} - \overline{T}_{fi}\right) \leq 0 = \frac{1}{2} - \int_0^\tau f(t) \cdot \mathrm{d}t, \quad \tau = \frac{\overline{T}_{si} - \overline{T}_{fi}}{\sqrt{\sigma^2_{\overline{T}_{si}} + \sigma^2_{\overline{T}_{fi}}}}$$

Die genannten Terminwahrscheinlichkeiten sind Erfahrungswerte (vgl. Tab. 3).

Tab. 3: Faustregeln zu Terminwahrscheinlichkeiten

[%]	**Risiko**	**Terminerwartung**
$0 \leq P \leq 25$	Groß	Termin unter den angenommenen Bedingungen kaum einzuhalten
$25 < P \leq 60$	Normal	Realistische Terminvorgabe
$60 < P \leq 100$	Klein	Termineinhaltung erfordert überhöhten Aufwand

Die Betaverteilung der Vorgangsdauern x in größeren Projekten dient der Berechnung des Mittels μ und der Standardabweichung σ. Sie begünstigt bei speziellen Annahmen die Anwendung in der Ablaufplanung, weil ihre Grenzwerte im endlichen Bereich liegen. Mit der Dichtefunktion und unter Verwendung der standardisierten Grenzen $a = 0$, $b = 1$:

$$f(x) = N \cdot (x-a)^\alpha \cdot (b-x)^\gamma, \quad N = \left[\int_a^b (x-a)^\alpha \cdot (b-x)^\gamma \cdot \mathrm{d}x\right]^{-1},$$

ergibt sich unter Verwendung von $x = t$ und der Gammafunktion Γ:

$$f(x) = N \cdot t^\alpha \cdot (1-t)^\gamma, \quad N = \left[\int_0^1 t^\alpha \cdot (1-t)^\gamma \cdot \mathrm{d}t\right]^{-1} = \frac{\Gamma(\alpha+\gamma+2)}{\Gamma(\alpha+1) \cdot \Gamma(\gamma+1)}.$$

Das Dichtemaximum: $f'(x_w) = 0$ mit der wahrscheinlichen Vorgangsdauer x_w ist diejenige Stelle der Verteilungsdichte, die das Intervall a, b im Verhältnis der Parameterwerte teilt:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{x_w - a}{b - x_w} \quad \Rightarrow \quad x_w = \frac{\alpha \cdot b + a \cdot \gamma}{\alpha + \gamma}.$$

Der allgemeine (nicht standardisierte) Zusammenhang für das Argument x lautet:

$$x = a + (b-a) \cdot t.$$

Für das Mittel μ der standardisierten Funktion und das dazugehörige Integral gilt:

$$\mu = \int_0^1 t \cdot N \cdot t^\alpha \cdot (1-t)^\gamma \cdot \mathrm{d}t = N \cdot \int_0^1 t^{\alpha+1} \cdot (1-t)^\gamma \cdot \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(\alpha+\gamma+2)}{\Gamma(\alpha+1) \cdot \Gamma(\gamma+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1) \cdot \Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+2)}.$$

Unter Einbeziehung der induktiven Eigenschaft der Gammafunktion ist das Mittel μ:

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z) \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{\alpha+1}{\alpha+\gamma+2}.$$

Mit Einsetzen der Transformation für das Argument x gilt für den allgemeinen Fall:

$$\mu = a + (b-a) \cdot \frac{\alpha+1}{\alpha+\gamma+2} = a + b \cdot \frac{\alpha+1}{\alpha+\gamma+2} - a \cdot \frac{\alpha+1}{\alpha+\gamma+2} = \frac{(\alpha+1) \cdot (\gamma+1)}{\alpha+\gamma+2}.$$

Die Standardabweichung σ ist Resultat folgender Entwicklung:

1. Das Moment 2. Ordnung ist:

$$N \cdot \int_0^1 t^{\alpha+2} \cdot (1-t)^{\gamma} \cdot \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(\alpha+\gamma+2)\cdot\Gamma(\alpha+3)\cdot\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\gamma+1)\cdot\Gamma(\alpha+\gamma+2)} = \frac{(\alpha+2)\cdot(\alpha+1)}{(\alpha+\gamma+3)\cdot(\alpha+\gamma+2)}.$$

2. Das zentrale Moment 2. Ordnung ist:

$$o^2 = N \cdot \int_0^1 (t-\mu)^2 \cdot t^{\alpha} \cdot (1-t)^{\gamma} \cdot \mathrm{d}t = N \cdot \left(\int_0^1 t^2 \cdot t^{\alpha} \cdot (1-t)^{\gamma} \cdot \mathrm{d}t - 2 \cdot \mu \cdot \int_0^1 t \cdot t^{\alpha} \cdot (1-t)^{\gamma} \cdot \mathrm{d}t \right.$$

$$\left. + \mu^2 \cdot \int_0^1 t^{\alpha} \cdot (1-t)^{\gamma} \cdot \mathrm{d}t) \right) = \frac{(\alpha+2)\cdot(\alpha+1)}{(\alpha+\gamma+3)\cdot(\alpha+\gamma+2)} - 2 \cdot \mu \cdot \mu + \mu^2 \cdot 1,$$

$$o^2 = \frac{(\alpha+2)\cdot(\alpha+1)}{(\alpha+\gamma+3)\cdot(\alpha+\gamma+2)} - \frac{(\alpha+1)^2}{(\alpha+\gamma+2)^2} = \frac{(\alpha+1)\cdot(\gamma+1)}{(\alpha+\gamma+3)\cdot(\alpha+\gamma+2)^2}.$$

3. Für die allgemeine Betaverteilung ist das Intervall 0, 1 auf die Breite a, b zu strecken:

$$o^2 = (b-a)^2 \cdot \frac{(\alpha+1)\cdot(\gamma+1)}{(\alpha+\gamma+3)\cdot(\alpha+\gamma+2)^2}.$$

4. Die Varianz ergibt sich unter der Annahme: $\alpha + \gamma = 4$, aus folgender Näherung:

$$5 \le (\alpha+1)\cdot(\gamma+1) \le 9 \quad \text{und} \quad \sigma^2 = \frac{(\alpha+1)\cdot(\gamma+1)}{7 \cdot 6^2} \cdot (a+b)^2 \approx \left(\frac{a+b}{6}\right)^2.$$

   Der relative Fehler der Näherung ist nicht größer als 2/7 = 28,58 %.

Ausgehend von den theoretischen Grundlagen gelten für die Zeitplanung folgende Annahmen:

- Alle Vorgangsdauern existieren im Intervall zwischen der
  - optimistischen Vorgangsdauer a mit besten Bedingungen ohne Leistungsverluste,
  - pessimistischen Vorgangsdauer b bei schwierigsten Umständen mit vielen Störungen,
  - bei der alle links oder rechts daneben liegenden Argumente höchstens in einem Prozent aller Fälle überschritten und daher ausgeschlossen werden.
- Für die wahrscheinliche Vorgangsdauer x_w aus Normal-, Prüf-, Transport-, Verlust- und Die Summe der Exponenten α, β wird gleich 4 gesetzt.
- Für die Exponenten α, β gilt: α < β, weil dann eine linkssteile (rechtsschiefe) Verteilung mit einer einfachen Beziehung für das Betamittel μ eintritt (vgl. Bild 3).

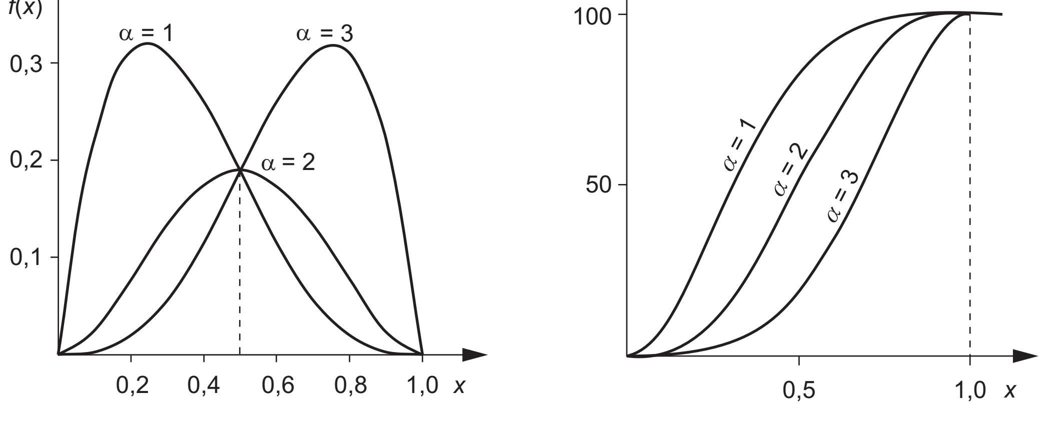

Bild 3: Beta-Dichtefunktionen und Beta-Verteilungsfunktionen

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\gamma+2)\cdot(x-a)^{\alpha}\cdot(b-x)^{\gamma}}{(b-a)^{(\alpha+\gamma+1)}\cdot\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\gamma+1)}, \quad x \in (a,b), \quad a = x_1, \quad b = x_n$$

$$x_w = \frac{a\cdot b + a\cdot\gamma}{4}, \quad \mu = \frac{a + 4\cdot x_w + b}{6}, \quad \sigma = \frac{b-a}{6}$$

Die linkssteile Verteilung stellt sicher, dass die wahrscheinliche Vorgangsdauer x_w kürzer ist als die mittlere μ. Die wahrscheinliche Vorgangsdauer gilt für die Ausführung des Leistungsprozesses, die mittlere Vorgangsdauer geht in die Ablaufplanung ein. Die stets positive Differenz zwischen beiden Ausführungsdauern ist die Sicherheitsreserve für die Ablaufplanung.

$$\mu = \frac{a + 4\cdot x_w + b}{6}, \quad x_w < \mu, \quad \sigma = \frac{b-a}{6}, \quad \overline{T}_P = \sum_{i=1}^{m} \mu_i, \quad \sigma^2_{\overline{T}_P} = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2$$

Von der Forschungsgruppe STEUERUNG sind die voraussichtlichen Dauern für einzelne Arbeitsstufen der Funktionsmusterentwicklung eines Automaten geschätzt worden. Für die Ablaufplanung sollen für die kritischen Vorgänge (vgl. Tab. 4) die mittleren Dauern, deren Standardabweichungen (vgl. Tab. 5), die Ablaufdauer und deren Varianz berechnet werden.

Tab. 4: Zeitschätzwerte der kritischen Vorgangsdauern in Dekaden [D]

Vorgang	***i***	**Optimistisch**	**Wahrscheinlich**	**Pessimistisch**
Lösungsweg	1	1	3	6
Funktionsentwurf	2	2	12	30
Betriebsmittelbau	3	6	8	16
Funktionsmusterbau	4	2	9	15
Prüfplan	5	4	3	5
Funktionstestung	6	4	5	8

Anzahl kritischer Vorgänge	m	=	6	
Ablaufdauer	T	=	42,83	D
Varianz der Ablaufdauer	σ^2	=	30,86	D^2

Tab. 5: Mittelwerte und Standardabweichungen der Vorgangsdauern in Dekaden [D]

Vorgang	**Nr.**	**Mittel μ [D]**	**Standardabweichung σ [D]**
Lösungsweg	1	3,17	0,83
Funktionsentwurf	2	13,33	4,67
Betriebsmittelbau	3	8,33	2,33
Funktionsmusterbau	4	9,50	1,50
Prüfplan	5	3,17	0,50
Funktionstestung	6	5,33	0,67

---

1 Es handelt es sich dabei i. d. R. um die in einem Betrieb aufgelegte Fertigung einer Menge von Produkten gleicher konstruktiver und technologischer Ausführung.

2 Vgl. Oppitz, V.: Gabler Lexikon Wirtschaftlichkeitsrechnung, Wiesbaden 1995, S. 4 ff.

3 Oppitz, V.: Marktorientierte Produktanalyse und Prozessablaufplanung, Lehrbrief „Managementinformatik“ der Akademie für Weiterbildung und Wissenstransfer an der Technischen Universität Dresden 1994, S. 20.

4 Vgl. Oppitz, V.: Die Verteilung des Arbeitsaufwandes in der Produktionszeit. In: Deutsche Flugtechnik, Heft 4/1961, S. 126/130.

5 Vgl. Oppitz, V.: Gabler Lexikon Wirtschaftlichkeitsrechnung, Wiesbaden 1995, S. 67 ff.